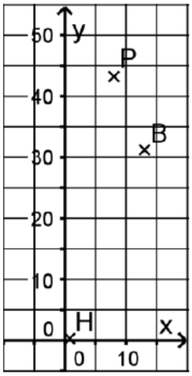
Lösungen zur Abituraufgabe zur Vektorrechnung

a)



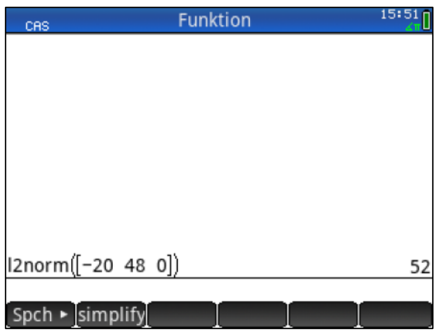
b) Alle Punkte, die die Positionen des Hubschraubers darstellen, haben die gleiche z-Koordinate. Flughöhe = 250 m.

c)

Der Betrag des Vektors:

$$\left|\begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 53$$

gibt die Geschwindigkeit an.

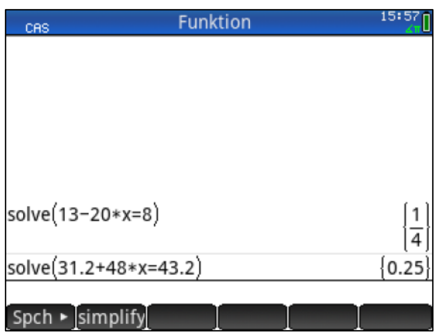


d)

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 31{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 43{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{1}{4}$$

Es vergehen $\frac{1}{4}$ Stunde = 15 Minuten.



e) $e'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2407}{18020}$

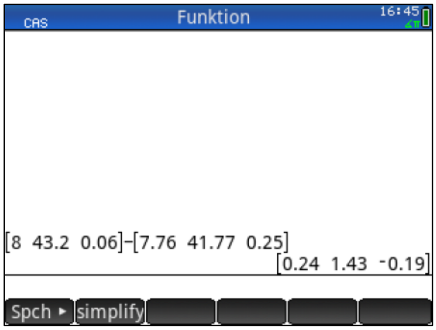
Der Wert entspricht der Zeit in Stunden, die vom Zeitpunkt des Auftrags an vergeht, bis der Hubschrauber die geringste Entfernung zum Boot hat.

f)

Als Richtungsvektor des Lande-vorgangs benötigen wir den Vektor:
$\overrightarrow{H_L L} = \vec{L} - \overrightarrow{H_L}$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 43{,}2 \\ 0{,}06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7{,}76 \\ 41{,}77 \\ 0{,}250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 1{,}43 \\ -0{,}19 \end{pmatrix}$$

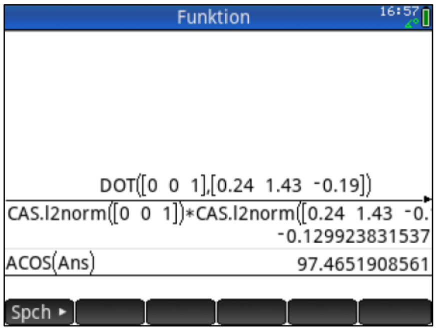
Dies geben wir direkt ein.



Noch f)

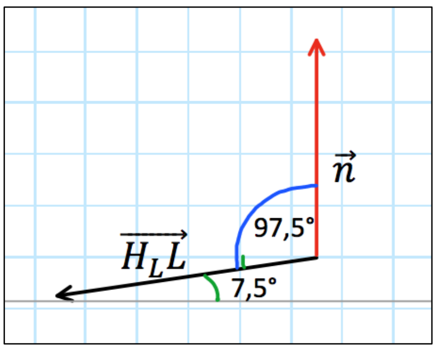
Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{H_L L} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 1{,}43 \\ -0{,}19 \end{pmatrix}$
bestimmen wir den Winkel zwischen dem Landevektor und dem senkrechten Normalenvektor durch Eingabe in einer Formel.

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{H_L L}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{H_L L}|}$, $\alpha \approx 97{,}5°$



Der Winkel zur Horizontalen beträgt $\alpha - 90° = 7{,}5°$.

Siehe Skizze.



g)

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,3 \\ 0,25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0,24 \\ 1,43 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

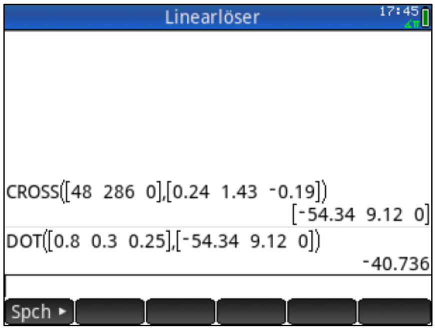
Für die Koordinatenform bestimmen wir einen Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

$$\begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,24 \\ 1,43 \\ -0,19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54,34 \\ 9,12 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Es gilt:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Damit ist $\vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n} = 0$ noch das Skalarprodukt von $\vec{p} \cdot \vec{n}$ zu berechnen.



Eine mögliche Koordinatengleichung lautet dann:

$$-54,34x + 9,12y + 40,736 = 0$$

Oder in ganzzahlige Werte umgeformt:

$$\Leftrightarrow \; 54340x - 9120y - 40736 = 0 \mid : 76$$

$$\Leftrightarrow \quad 715x - 120y - 526 = 0$$