Aufgaben zur Vektorrechnung

Aufgabe aus dem IQB-Pool – gemeinsame Aufgabenpools der Länder

Die Position einer Bohrplattform im Meer kann in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch den Punkt $P\ (8 \mid 43{,}2 \mid 0)$ dargestellt werden. Die xy-Ebene beschreibt die Wasseroberfläche. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.

Die Besatzungen eines Boots und eines Hubschraubers werden gleichzeitig beauftragt, die Besatzung der Plattform in einer Notsituation zu unterstützen. Zum Zeitpunkt des Auftrags wird die Position des Boots durch den Punkt
$B\ (13 \mid 31{,}2 \mid 0)$ dargestellt. Unmittelbar anschließend fährt es geradlinig mit der Geschwindigkeit $52\ \frac{km}{h}$ in Richtung der Plattform.

Die Position des Hubschraubers kann vom Zeitpunkt des Auftrags bis zum

Beginn seiner Landephase durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}3 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix}$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden, die seit dem Auftrag vergangen ist. Die Landephase beginnt im Modell im Punkt $H_L\ (7{,}76 \mid 41{,}77 \mid 0{,}25)$.

a) Veranschaulichen Sie die Positionen der Plattform, des Boots und des Hubschraubers zum Zeitpunkt des Auftrags – unter Vernachlässigung der Flughöhe des Hubschraubers – in der xy-Ebene.

b) Begründen Sie, dass der Hubschrauber bis zur Landephase parallel zur Wasseroberfläche fliegt, und geben Sie seine Flughöhe über der Wasseroberfläche an.

c) Begründen Sie, dass die Position des Boots vom Zeitpunkt des Auftrags bis zum Erreichen der Plattform durch die Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 31{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, wobei t die seit dem Auftrag

vergangene Zeit in Stunden ist.

d) Ermitteln Sie, wie viel Zeit vom Zeitpunkt des Auftrags an vergeht, bis das Boot die Plattform erreicht.

e) Betrachtet wird die Funktion e mit

$e(t) = \left| \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}3 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 31{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|$ und $0 < t < 0{,}145$.

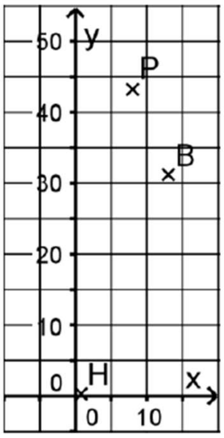
Bestimmen sie denjenigen Wert von t, für den e seinen kleinsten Wert annimmt, und beschreiben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang.

f) Der Hubschrauber bewegt sich während seiner Landephase mit verringerter Geschwindigkeit geradlinig auf die horizontale Landefläche der Plattform zu, die im Modell durch den Punkt $L\ (8 \mid 43{,}2 \mid 0{,}06)$ dargestellt wird. Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn während der Landephase gegenüber der Horizontalen.

g) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform, in der sich der Hubschrauber vom Auftrag bis zur Landung im Modell bewegt.

Lösungen

a)



b) Alle Punkte, die die Positionen des Hubschraubers darstellen, haben die gleiche z-Koordinate. Flughöhe = 250 m.

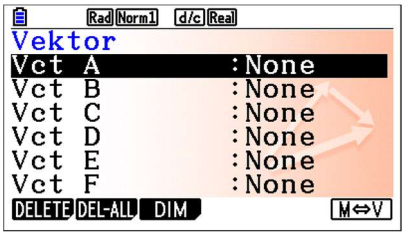
c)

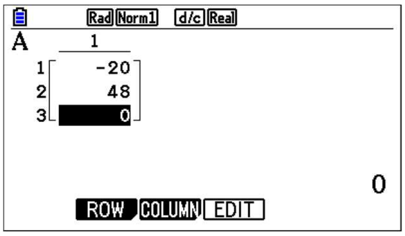
Der Betrag des Vektors:

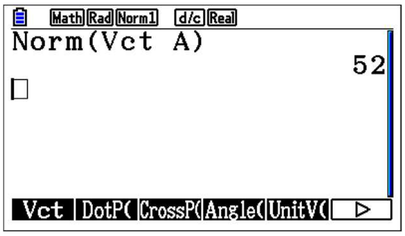
$$\left|\begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 52$$

gibt die Geschwindigkeit an.

Wir legen den Vektor an als VctA und berechnen den Betrag über die Funktion Norm().x





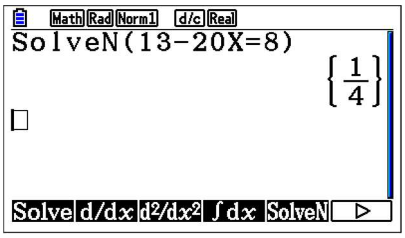


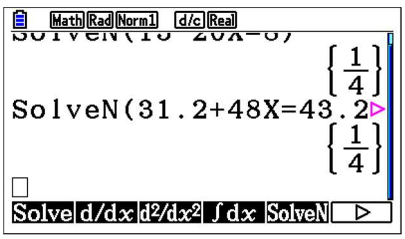
d) Funktion SolveN():

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 31{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 43{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{1}{4}$$

Es vergehen $\frac{1}{4}$ Stunde = 15 Minuten.





e) $e'(t) = 0 \;\Leftrightarrow t = \frac{2407}{18020}$

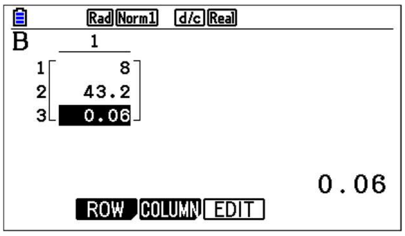
Der Wert entspricht der Zeit in Stunden, die vom Zeitpunkt des Auftrags an vergeht, bis der Hubschrauber die geringste Entfernung zum Boot hat.

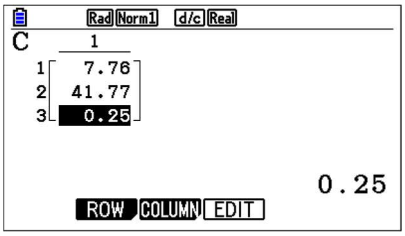
f)

Als Richtungsvektor des Landevorgangs benötigen wir den Vektor: $\overrightarrow{H_L L} = \vec{L} - \overrightarrow{H_L}$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 43{,}2 \\ 0{,}06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7{,}76 \\ 41{,}77 \\ 0{,}250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 1{,}43 \\ -0{,}19 \end{pmatrix}$$

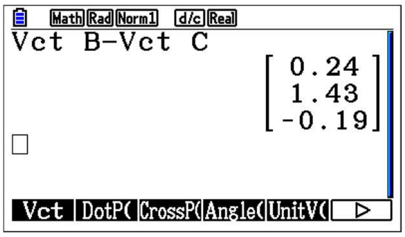
Dies geben wir direkt ein.





VctB $= \begin{pmatrix} 8 \\ 43{,}2 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}$

VctC$= \begin{pmatrix} 7{,}76 \\ 41{,}77 \\ 0{,}250 \end{pmatrix}$

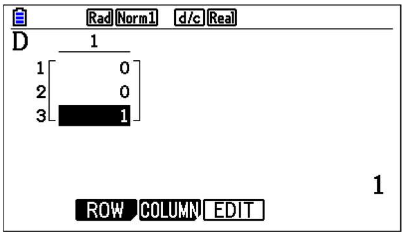


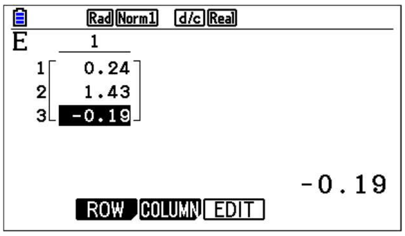
Noch f)

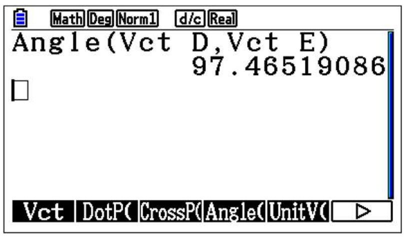
Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{H_L L} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 1{,}43 \\ -0{,}19 \end{pmatrix}$ bestimmen wir den Winkel zwischen dem Landevektor und dem senkrechten Normalenvektor durch Eingabe in einer Formel.

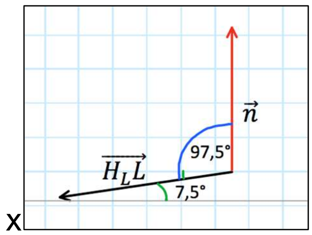
$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{H_L L}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{H_L L}|}$, $\alpha \approx 97{,}5°$

Der Winkel zur Horizontalen beträgt $\alpha - 90° = 7{,}5°$. Siehe Skizze.









g)

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,3 \\ 0,25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0,24 \\ 1,43 \\ -0,19 \end{pmatrix}$$

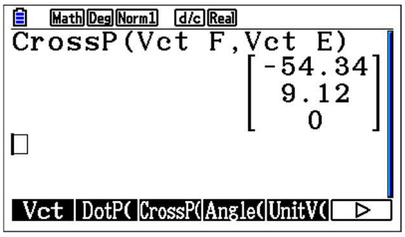
Für die Koordinatenform bestimmen wir einen Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

$$\begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,24 \\ 1,43 \\ -0,19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54,34 \\ 9,12 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Es gilt:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Damit ist $\vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n} = 0$ noch das Skalarprodukt von $\vec{p} \cdot \vec{n}$ zu berechnen.



Eine mögliche Koordinatengleichung lautet dann:

$$-54,34x + 9,12y + 40,736 = 0$$

Oder in ganzzahlige Werte umgeformt:

$$\Leftrightarrow \; 54340x - 9120y - 40736 = 0 \;|:76$$

$$\Leftrightarrow \quad 715x - 120y - 526 = 0$$