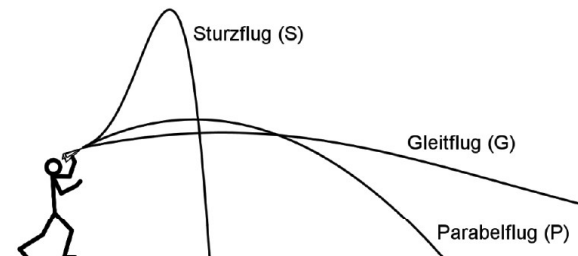


Abitur Beispielaufgaben

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe aus dem IQB-Pool – gemeinsame Aufgabenpools der Länder

Papierflieger verlassen die Hand eines Werfers in einer bestimmten Abwurfhöhe, unter einem bestimmten Abwurfwinkel und mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit. Die Flugkurven können abhängig von diesen drei Bedingungen sowie von der jeweiligen Bauweise des Papierfliegers unterschiedlich verlaufen. Im Folgenden sollen drei verschiedene Flugkurven schematisch dargestellt werden.



Wird die Größe der vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Im Folgenden soll der x-Wert der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

1. Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ S. Diese kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit
$$s(x) = -x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$$
 beschrieben werden.
 - a) Geben Sie die Abwurfhöhe an und zeigen Sie, dass die Flugweite etwa 2,27 m beträgt.
 - b) Zeigen Sie, dass der Papierflieger seine maximale Flughöhe besitzt, wenn seine horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt etwa 1,55 m beträgt. Geben Sie diese Flughöhe an.
 - c) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte des Graphen von s und geben Sie die jeweilige Steigung des Graphen von s in den Wendepunkten an.
 - d) Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts mit der größeren x-Koordinate im Hinblick auf die Steigung der Flugkurve des Papierfliegers.
2. Im Folgenden wird ein Papierflieger betrachtet, der sich bei jedem Flug entlang einer Flugkurve vom Typ P bewegt. Er wird in 2 m Höhe abgeworfen und erreicht seine größte Höhe in einer horizontalen Entfernung von 2 m vom Abwurfpunkt. Seine möglichen Flugkurven lassen sich näherungsweise mithilfe ganzrationaler Funktionen zweiten Grades beschreiben.
 - a) Begründen Sie, dass die möglichen Flugkurven dieses Papierfliegers im Modell durch den Punkt $(4 \mid 2)$ verlaufen.
 - b) Zeigen Sie, dass sich alle möglichen Flugkurven dieses Papierfliegers im Modell mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen
$$p_k(x) = -0,25k \cdot x^2 + k \cdot x + 2$$
 und $k \in \mathbb{R}^+$ beschreiben lassen.
 - c) Ermitteln Sie denjenigen Wert von k , für den der Papierflieger eine Flugweite von 6 m hat. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $p_{\frac{1}{4}}$ und $p_{\frac{2}{3}}$.

- d) Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a; b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h' , so gilt für die Länge L

$$\text{dieses Kurvenstücks: } L = \int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2} dx .$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob $p_{\frac{1}{4}}$ oder $p_{\frac{2}{3}}$ die längere Flugkurve beschreibt.

- e) Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Abwurfwinkel der mithilfe von p_k beschriebenen Flugkurve ebenso groß ist wie der Abwurfwinkel der mithilfe der Funktion s beschriebenen Flugkurve.

3. Die größten Flugweiten erzielen Papierflieger mit Flugkurven des Typs G. Eine solche Flugkurve soll mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit

$$g(x) = 2e^{-0,02x^2 + 0,1x} \text{ beschrieben werden.}$$

- a) Beurteilen Sie die Eignung von g zur modellhaften Beschreibung der Flugkurve bezogen auf den Verlauf des Graphen von g für $x \rightarrow \infty$.
- b) Die Flugweite beträgt 15,3 m. Der erste Teil der Flugkurve lässt sich mithilfe von g beschreiben. Ab einem bestimmten Punkt kann der weitere Verlauf der Flugkurve bis zum Boden durch eine Gerade dargestellt werden. Dieser zweite Teil der Flugkurve hat eine Länge von 10,6 m. Bestimmen Sie die horizontale Entfernung des Übergangs vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve vom Abwurfpunkt und prüfen Sie, ob dieser Übergang ohne Knick erfolgt.

Lösungsansätze

1. a) Wir geben im **Hauptmenü 1** – dem **Berechnungsfenster** den Term für die Funktion

$$s(x) = -x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2 \text{ ein.}$$

Calculator screen showing the function $-x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$ and $x = 0$.

Calculator screen showing the function $-x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$ and the result 2 .

Die **Abwurfhöhe** ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$. Mit der Taste können wir $x = 0$ ein geben. **2** wird angezeigt.

Die **Flugweite** ist die erste Nullstelle für $x > 0$, diese erhalten wir über das **Hauptmenü A** „**Gleichung/Funkt**“ und anschließend **2: Polynomgleichung** 4. Grades.

Calculator screen showing the menu options for solving equations: **A: Gleichung/Funkt**.

Calculator screen showing the menu options for solving equations: **1: Gleichungssyst.**, **2: Polynom-Gleich.**

Calculator screen showing the polynomial equation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ with coefficients $-1x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0.5x + 2$.

Calculator screen showing the polynomial equation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ with the result $x_1 = 2,268487277$.

- b) Die maximale **Flughöhe** ist der Hochpunkt.

Die 1. Ableitung müssen wir ohne Taschenrechner ausrechnen:

$$s'(x) = -4x^3 + 6x^2 + \frac{1}{2}$$

Jetzt bestimmen wir die Nullstelle dieser Funktion analog zu b) als Polynomgleichung 3. Grades.

Calculator screen showing the polynomial equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ with coefficients $-4x^3 + 6x^2 + 0x + 0.5$.

Calculator screen showing the polynomial equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ with the result $x_1 = 1,551901701$.

Die maximale Flughöhe ist der y-Wert an der Stelle 1,5519.... Wir speichern den Wert in der Variablen A und bestimmen die Funktionswert wie in a).

$$-x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$$

$$x = 1$$

$$-x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$$

$$x = 1,551901701$$

$$-x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$$

$$4,450762306$$

1. c) Wendestellen bestimmen

Hierzu müssen wir die Funktion der 2. Ableitung schnell ohne Taschenrechner bestimmen.

$$s''(x) = -12x^2 + 12x$$

Wir sehen, dass eine Wendestelle bei $x=0$ vorliegt. Die zweite bestimmen wir analog zu b).

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 =$$

$$1$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_2 =$$

$$0$$

Die Steigung an diesen Stellen können wir durch den Wert der ersten Ableitung der Funktion oder durch einsetzen in die 1. Ableitungsfunktion berechnen.

$$\frac{d}{dx} \left(-x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2 \right) \Big|_x$$

$$\frac{d}{dx} \left(-x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2 \right) \Big|_x$$

$$2,5$$

Die Steigung an der Stelle $x=1$ ist 2,5.

Die Steigung an der Stelle $x=0$ ist 0,5.

1. d) Der Wendepunkt mit der größeren x-Koordinate stellt den Punkt dar, in dem die Steigung der Flugkurve gegenüber dem Boden am größten ist.

2. a) Die Graphen, die die Flugkurven beschreiben, sind Parabeln, die durch den Punkt (0 | 2) verlaufen und symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 2$ sind. Damit enthalten Sie auch den Punkt (4 | 2).

2. b) $p_k(x) = i \cdot x^2 + k \cdot x + j$
 $p_k(0) = 2 \Leftrightarrow j = 2, p'_k(2) = 0 \Leftrightarrow i = -0,25k$

2. c) Parameter in der Funktion $p_k(x) = -0,25k \cdot x^2 + k \cdot x + 2$

Wir lösen die Gleichung $0 = -0,25k \cdot 6^2 + k \cdot 6 + 2$.

Einfaches ausrechnen liefert: $3k = 2$ oder $k = \frac{2}{3}$.

$$p_{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + 2, \quad p_{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$$

Wir können die Funktionen jeweils mit dem QR-Code Generator grafisch darstellen.

Dazu geben wir die beiden Funktionen im **Hauptmenü 9 – Tabellen** ein.:

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$$

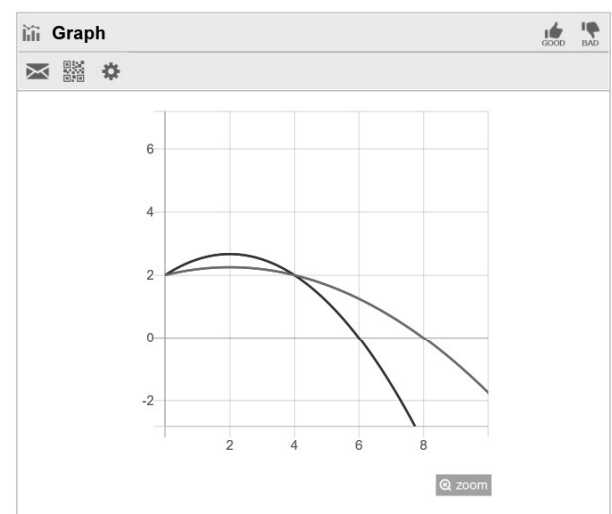
Tabellenbereich
 Start: 0
 Ende : 10
 Inkre: 0,5



$$g(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$$

x	f(x)	g(x)
6	1,25	0
6,5	0,9843	-0,708
7	0,6875	-1,5
7,5	0,3593	-2,375

7,5



Durch Ablesen erkennen wir schon, dass die erste Kurve eine „spätere“ Nullstelle hat und damit die längere Flugkurve ist.

2. d) Wir bestimmen die 1. Ableitung der beiden Funktionen

$$p'_{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}, \quad p'_{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Und setzen geben die Funktionen als Integral ein.

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\right)^2} dx$$

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\right)^2} dx$$

8,543230975

Damit ist $p_{\frac{1}{4}}(x)$ die längere Flugkurve.

$$\int_0^6 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2} dx$$

7,120819867

2. e) $p'_k(0) = s'(0) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$
3. a) Der Graph von g nähert sich für $x \rightarrow \infty$ der x -Achse an, berührt diese jedoch nicht. Da der Papierflieger irgendwann auf den Boden trifft, ist das Modell zur Beschreibung der Flugkurve nur eingeschränkt geeignet.
3. b) Für $x \leq 15,3$ liefert $(15,3 - x)^2 + g(x)^2 = 10,6^2: x \approx 4,89$.

Die Entfernung des Übergangs vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve von der Abwurfstelle beträgt etwa 4,89 m.

$$g'(4,89) \approx -0,19$$

$$\frac{g'(4,89)}{15,3 - 4,89} \approx -0,19$$

Der Übergang erfolgt näherungsweise ohne Knick.